Хомоморфизми група

<u>Деф:</u> Нека су $(G,*)$ и $(G',\circ)$ групе. Пресликавање $f: G\to G'$ је <u>хомоморфизам</u>, ако важи:

$$(\forall x,y\in G)\qquad f(x*y)=f(x)\circ f(y).$$

Ако је f изоморфизам (бијективни хомоморф.) пишемо $G\simeq G'$.

<u>Језгро</u> хомоморф. $f: G\to G'$ је:

$$\operatorname{Ker} f=\{x\in G \mid f(x)=e'\}\leq G$$

<u>Слика</u> хомоморфизма f

$$\operatorname{Im} f=f(G)=\{f(x)\mid x\in G\}\leq G'$$

<u>Лема:</u> Нека је $f: G\to G'$ хом. група.

а) Пресл. f је епимор. $\iff \operatorname{Im} f=G'$

б) -||- -||- моном. $\iff \operatorname{Ker} f=\{e\}$

c) -||- -||- изом. $\iff \operatorname{Im} f=G' \wedge \operatorname{Ker} f=\{e\}$

Д. сами!

Т. Нека је $f: G\to G'$ хом. група G и G'.

а) Ако је $A\leq G$, онда је

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}\leq G'$$

б) Ако је $B\leq G'$, онда је

$$f^{-1}(B)=\{x\in G\mid f(x)\in B\}\leq G.$$

Д. сами!

Нормалне подгрупе

<u>Деф:</u> Нека је $H \leq G$, $(G,\cdot)$ група. Подгрупа H је <u>нормална подгрупа</u> групе G, ако важи
$$(\forall x \in G)\ xH = Hx.$$
Пишемо, $H \trianglelefteq G$. $\quad\ulcorner xh = h'x$, за неке $h, h' \in H$

<u>Т.</u> Нека је $H \leq G$. Онда су следећи услови еквивалентни.

a) $H \trianglelefteq G$

b) Релација $\equiv (\mathrm{mod}\, H)$ је конгруенција

c) $xHx^{-1} \subseteq H$, $\forall x \in G$

d) $xHx^{-1} = H$.

<u>Д.</u> <u>a) $\Rightarrow$ b)</u> Нека је $\left.\begin{array}{l} x \equiv y\ (\mathrm{mod}\, H) \\ x_1 \equiv y_1\ (\mathrm{mod}\, H) \end{array}\right\}$. Онда,

$$\left.\begin{array}{l} xy^{-1} \in H \\ x_1 y_1^{-1} \in H \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in Hy \\ x_1 \in Hy_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = hy \\ x_1 = h_1 y_1 \end{array},\ \text{за неке } h, h_1 \in H$$

Онда, $xx_1 = hyh_1y_1 = hh_2yy_1 \in Hyy_1$, јер је $yh_1 = h_2y$, $h_2 \in H$

тј. $xx_1 \in Hyy_1$, одн. $xx_1(yy_1)^{-1} \in H$, тј. $xx_1 \equiv yy_1\ (\mathrm{mod}\, H)$.

b) $\Rightarrow$ c) $e \in H$, $\forall h \in H$, $h^{-1} \in H$, тј. $e(h^{-1})^{-1} \in H$, одн. $e \equiv h^{-1}\ (\mathrm{mod}\, H)$

$(\forall x \in G)\ x \equiv x\ (\mathrm{mod}\, H)$

Због сагласности рел. $\equiv (\mathrm{mod}\, H)$:

$xe \equiv xh^{-1}\ (\mathrm{mod}\, H)$, тј. $x \equiv xh^{-1}\ (\mathrm{mod}\, H)$

Одавде, $x(xh^{-1})^{-1} \in H$, тј. $xhx^{-1} \in H$, $\forall h \in H$.

c) $\Rightarrow$ d) Нека је $h \in H$. Онда, $h = ehe = g^{-1}ghg^{-1}g \in g^{-1}Hg$

Дакле, $H \subseteq g^{-1}Hg$, $\forall g \in G$, па за $g = x^{-1}$: $H \subseteq xHx^{-1}$;

d) $\Rightarrow$ a) $xHx^{-1} = H$, $\forall x \in G$, одн. $xH = Hx$ тј. $H \trianglelefteq G$.

<u>Деф:</u> Подгрупе $A, B \leq G$ се називају <u>конјуговани</u> ако је $A = xBx^{-1}$, за неко $x \in G$. (помоћу елем. x)
Елементи a и xax^{-1} се називају <u>конјуговани</u> елементима (помоћу елемента x).
Приметимо да свака подгрупа Абелове групе је нормална подгрупа.
Такође, свака подгрупа H индекса 2 је нормална подгрупа те групе.

<u>Деф:</u> Нека је G група и $a \in G$. Пресликавање $f_a: G \to G$, деф. са: $(\forall x \in G)\ f_a(x) = axa^{-1}$ је аутоморфизам, који се назива <u>унутрашњи</u>. ↓ (доказ: сами!)

Означимо са $\mathrm{Inn}\, G = \{f_a : G \to G \mid f_a(x) = axa^{-1}, \forall x \in G\}$

Т. $\mathrm{Inn}\, G \trianglelefteq \mathrm{Aut}\, G$. Д. сами!

Т. Нека је $f: G \to G'$ хом. група G и G'.
Онда: а) Ако је $H \trianglelefteq G$, тада $f(H) \trianglelefteq f(G)$.
б) Ако је $H' \trianglelefteq G'$, тада $f^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

Д. сами!

Нека је $H \trianglelefteq G$. На скупу $G/_H = \{xH \mid x \in G\}$ се деф. бинарна операција $\odot$, на след. нач.: $(\forall x, y \in G)\ (xH) \odot (yH) = xyH$. Тада је $(G/_H, \odot)$ група, која се назива <u>фактор-група</u> групе G по подгрупи H.
H – јединични елемент, $x^{-1}H$ – инверзни елем. за елем. xH.

Операција $\odot$ је коректно дефинисана, јер је рел. $x \equiv y \pmod{H} \iff xy^{-1} \in H$ десно реда. конгруенција. ($x^{-1}y \in H$ – лево реда.)

<u>Т.</u> (Основна Т. о хомоморфизмима група)
Нека су $(G,\cdot)$ и $(G',*)$ групе и $f: G \to G'$ хомоморфизам група. Онда је $\mathrm{Ker} f \trianglelefteq G$. Обратно, ако је $H \trianglelefteq G$, тада $\exists \pi : G \xrightarrow{epi} G/H$ такво да је $\mathrm{Ker}\,\pi = H$. Такође,

$$G/\mathrm{Ker} f \cong f(G).$$

<u>Д.</u> $\forall x,y \in \mathrm{Ker} f$: $f(xy^{-1}) = f(x) * f(y^{-1}) = f(x) * f(y)^{-1} = e' * e'^{-1} = e'$.
$f(xyx^{-1}) = f(x) * f(y) * f(x)^{-1} = f(x) * e' * f(x)^{-1} = e'$, за $\forall y \in \mathrm{Ker} f, \forall x \in G$.
$\mathrm{Ker} f \neq \emptyset$, јер је $e \in \mathrm{Ker} f$ $\lceil f(e) = e' \rfloor$
Дакле, $\mathrm{Ker} f \trianglelefteq G$.
Обратно, нека је: $H \trianglelefteq G$. Онда, пресл. $\pi : G \to G/H$, деф. са
$(\forall x \in G)\ \pi(x) = xH$ је епиморфизам.
$(\forall x,y \in G)\ \pi(xy) = xyH = xH * yH = \pi(x) * \pi(y)$
$(\forall xH \in G/H)(\exists x \in G)\ \pi(x) = xH$.
Такође, $\mathrm{Ker}\,\pi = H$. Заиста,
$\mathrm{Ker}\,\pi = \{x \in G \mid \pi(x) = xH = H\}$.
Очигледно <u>$H \subseteq \mathrm{Ker}\,\pi$</u>. Обратно, за $\forall x \in \mathrm{Ker}\,\pi$
$\pi(x) = xH = H$, тј. $xh = h' \Rightarrow x = h'h^{-1} \in H$, тј.
<u>$\mathrm{Ker}\,\pi \subseteq H$.</u>

Специјално, за $H=\mathrm{Ker} f \trianglelefteq G$, дефинишемо пресликавање $h: G/_H \longrightarrow G'$, са:
$(\forall x\in G)\ h(xH)=f(x)$. Доказујемо да је h мономорфизам група $G/_H$ и G'!

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & G' \\ & G/_H \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Кор: $xH=yH$, тј. $y^{-1}x\in H=\mathrm{Ker} f$

$f(y^{-1}x)=e'$

$f(y^{-1})*f(x)=e'$

$f(y)^{-1}*f(x)=e'$

$f(x)=f(y)$, тј.

$h(xH)=h(yH)$.

Хом: $(\forall x,y\in G)$:

$h(xH\cdot yH)=h(xyH)=$
$=f(xy)=f(x)*f(y)=$
$=h(xH)*h(yH)$.

"1–1": $h(xH)=h(yH)$, за неке $x,y\in G$. Одатле
$f(x)=f(y) \Rightarrow f(y)^{-1}*f(x)=e'$, тј.
$f(y^{-1}x)=e' \Rightarrow y^{-1}x\in \mathrm{Ker} f = H$
одн. $x\equiv y \pmod H$,
тј. $xH=yH$.

Дакле, пресл. $h: G/_H \longrightarrow G'$ је мономорфизам, а

$h: G/_H \xrightarrow{на} f(G)\le G'$ је изоморфизам,

где је $f(G)=\{f(x)\,|\,x\in G\}$ хомом. слика групе.

Дакле, $G/_H\cong f(G)$, тј.

$G/\mathrm{Ker} f\cong \mathrm{Im} f$.

1) $f=h\circ\pi$
Сваки се хом. може факторисати и разликује се од природног за фактор h = моном.

2) Ако је $G'=f(G)$, тада се све групе, хомом. слике, исцрпљују фак. гр. G/H са тачношћу до изомор. h.

Деф: Нека је G група. Елементи облика $xyx^{-1}y^{-1}=[x,y]$, где су $x,y\in G$, називасе <u>комутатором</u> елемената x и y.

Подгрупа G' групе G, генерисана комутаторима елемената групе G, називасе <u>изводном</u> групом групе G, тј.

$$G'=\langle [x,y] \mid x,y\in G\rangle, \text{ тј.}$$

$$G'=\{c_1\cdot c_2\cdots c_n \mid c_i=x_iy_ix_i^{-1}y_i^{-1},\ x_i,y_i\in G\}$$

Назива се још и <u>комутант</u> групе.

Т. a) $G'\trianglelefteq G$

б) G/G' је Абелова група

ц) Ако је $H\trianglelefteq G$, тада је G/H Абелова група акко $H\supseteq G'$.

Д. сами!

Т. Ако су $A,B\leq G$ и $A\cdot B\leq G$, тада је $A\cdot B=\langle A\cup B\rangle$.

Д. $\left.\begin{array}{l}\forall a\in A,\ a=ae\\ \forall b\in B,\ b=eb\end{array}\right\}\in AB \Rightarrow \left.\begin{array}{l}A\subseteq A\cdot B\\ B\subseteq A\cdot B\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup B\subseteq A\cdot B$

Како је $AB\leq G$, која садржи $A\cup B$, а $\langle A\cup B\rangle$ је најмања таква, то је $\langle A\cup B\rangle\subseteq A\cdot B$.

С друге стране, $AB\subseteq\langle A\cup B\rangle$ → коначни производ. $g_1^{k_1}\cdots g_n^{k_n}$, $g_i\in A\cup B$, $k_i=\pm1$

Дакле, $A\cdot B=\langle A\cup B\rangle$.

1. Скуп подгрупа дате групе G је уређен релацијом инклузије. У случају нормалних подгрупа, то је модуларна мрежа.

2. $\mathcal{H} = \{H \mid H \leq G,\ G\text{-група}\}$

$(\mathcal{H}, \subseteq)$ парц. ур. скуп, на коме се деф. две бинар. опер.:

$A \vee B = \langle A \cup B \rangle$
$A \wedge B = A \cap B$, па је $(\mathcal{H}, \vee, \wedge)$ мрежа подгрупа

$\mathcal{H}' = \{H \mid H \trianglelefteq G,\ G\text{-група}\}$

Приметимо да ако су $A, B \leq G$, производ $A \cdot B \not\leq G$ (не мора да буде)
Али, ако је A или B норм. подгрупа у G, онда је $AB \leq G$. (сами!)
Ако је $A, B \trianglelefteq G$, онда $AB \trianglelefteq G$. (сами!)

Модуларни закон: $\forall A, B, C \in \mathcal{H}'$:
$A \subseteq C$, $(A \vee B) \wedge C = A \vee (B \wedge C)$, тј.

$$(A \cdot B) \cap C = A \cdot (B \cap C)$$

$A \cdot (B \cap C) \subseteq (A \cdot B) \cap C$, јер: $A \cdot (B \cap C) \subseteq \overset{\subseteq C}{A} \cdot C \subseteq C \cdot C \subseteq C$
С друге стране, важи је $A \cdot (B \cap C) \subseteq AB$
$x \in (AB) \cap C \Rightarrow x \in AB \wedge x \in C$, тј. $x = \underset{A}{a}\underset{B}{b} \wedge x \in C$
$\Rightarrow b = a^{-1}x \in C$, тј. $b \in B \wedge C$
Дакле, $x \in A \cdot (B \cap C)$, $\forall x$, тј.
$(AB) \cap C \subseteq A \cdot (B \wedge C)$.